Predikatski račun

Cvetana Krstev

November 6, 2012

Poglavlje 2

Predikatski račun

Cvetana Krstev

2.1 Simbolizacija rečenica pomoću kvantifikatora

Logika se bavi utvrđivanjem principa za valjanost dokaza u onoj meri u kojoj ta valjanost zavisi samo od oblika rečenica a ne i od njihovog sadržaja. Iskazna logika se bavi onim aspektom rečenične forme koji se može opisati analizirajući rečenice u delove povezane veznicima *i*, *ili*, i tako dalje. Postoje mnoga izvođenja čija se valjanost ne može utvrditi samo na osnovu iskazne logike. Među njima su primeri:

I Neki ljudi su lenji.
Svi lenji ljudi vole mnogo da spavaju.
$\therefore$ Neki ljudi vole mnogo da spavaju.

II Konj je životinja.
$\therefore$ Glava konja je glava životinje.

III Petar je stari momak.
Svi Mirini muški rođaci su oženjeni.
$\therefore$ Petar nije Mirin ujak.

Zaključivanje u sva tri primera je valjano, pitanje je samo da li valjanost zavisi samo od forme premisa ili i od njihovog sadržaja. Ovo zahteva preciznu definiciju pojma *forma*, što s druge strane zahteva donošenje nekih donekle proizvoljnih odluka.

Prvi primer spada u domen logike ako rečenice rastavimo u manje delove i, posebno, ako se složimo da su *svi* i *neki* „logičke konstante“ tako da postaju deo „forme“ rečenice. Upravo ovakve logičke forme teži da predstavi predikatski račun, ili kvantifikatorska logika.

Moglo bi se tvrditi da je i drugi primer valjan na osnovu forme, ali pokazuje se da relevantni aspekti te forme ne mogu da se predstave ni u iskaznoj ni u kvantifikatorskoj logici. Da bi se ovakvo tvrđenje formalizovalo trebalo bi razviti neku logiku tipa „relacije deo-celina“. Zaključivanje iz primera **I** se češće sreće u matematici i nauci uopšte od zaključivanja nalik onome iz primera **II**, i stoga ono i jeste formalizovano.

Valjanost trećeg zaključivanja suštinski zavisi od odnosa među rečima „stari momak“, „muški“ „rođak“, „oženjen“ i „ujak“. Ovakva vrsta zaključivanja, premda nije strogo empirijska nije ni strogo logička. Međutim, bilo bi moguće izvesti „logičku formu“ rečenica koje nalikuju onima iz primera **III** koje bi uključivale apstraktnije entitete od stvarnih leksičkih jedinica. Na primer, ako iskazu „Petar je stari momak“ pridružimo istu logičku formu „Petar nije oženjen“ dobijamo sledeće valjano zaključivanje na osnovu predikatskog računa:

	Petar nije oženjen.
	Svi Mirini muški rođaci su oženjeni.
$\therefore$	Petar nije Mirin rođak.

Zaključak „Petar nije Mirin rođak“ uključuje kao svoj deo tvrđenje „Petar nije Mirin ujak“.

Treba istaći da pojmovi kao što je „logička forma“ veoma zavise od toga šta će se smatrati logičkom konstantom i da li leksičke jedinice kao što su „stari momak“, „ujak“, i slične treba smatrati primitivnim (osnovnim) ili ih treba dalje analizirati u poddelove.

Da bi se formalizovalo zaključivanje iz prvog primera, rečenice treba rastaviti u tri vrste delova, a to su *termi*, *predikati* i *kvantifikatori.* Term može da bude *konstanta* koja predstavlja neki određeni objekat ili *promenljiva* koja predstavlja neki objekat iz određenog domena. Kod primena u matematici, term može da bude i operacijski izraz, npr. x^2 ili $x+y$. Predikat je izraz koji daje neku osobinu termu, paru terma ili n-torci terma. Predikat, koji se kao termin češće koristi u matematičkoj logici, je zapravo sinonim za relaciju — n-to člani predikat je sinonim za relaciju dužine n, tj. podskup Dekartovog proizvoda n skupova. Predikat se obično označava jednim velikim slovom, za kojim sledi n terma, a to su argumenti predikata. n-to člani predikat iza koga sledi n konstantnih terma formira *rečenicu.* Rečenica se svodi na iskaz koji ima tačno jednu istinitosnu vrednost — tačno ili netačno.

Primeri:

Termi:	Konstante:	$s =$ Saša, $j =$ Joca, $m =$ Mira
	Promenljive:	u, v, w, x, y, z
Predikati:	Jednočlani	$Mx =$ „x je čovek“
		$Sx =$ „x lepo peva“
	Dvočlani	$Rxy =$ „x ne voli y“
		$Pxy =$ „x je prijatelj od y“
Rečenice:	Ss	Saša lepo peva
	Mj	Joca je čovek
	$\neg Ss \Rightarrow Rms$	Ako Saša ne peva lepo onda Mira ne voli Sašu
	$Pms \Rightarrow Rjs$	Ako je Mira Sašin prijatelj onda Joca ne voli Sašu

Izraz $Pmx \Rightarrow Rjs$ (Ako je Mira prijatelj od x onda Joca mrzi x) ne spada u rečenice zbog promenljive x. Takav izraz naziva se *rečenična forma* i on postaje rečenica tek kad se promenljiva x zameni bilo kojim konstantnim termom.

Drugi način da se od rečenične forme napravi rečenica je dodavanje *kvantifikatora*. U predikatskim računu se koriste dva kvantifikatora, *univerzalni* ($\forall$) i *egzistencijalni* ($\exists$). Jedan izraz je rečenica ako ga je moguće prevesti na prirodan jezik ne koristeći promenljive x ili y. Sledeći primeri pokazuju kako to kvantifikatori omogućavaju:

$(\forall x)(Sx \Rightarrow Pmx)$	ili formalnim jezikom: „Za svako x, ako x lepo peva, Mira je prijatelj od x“ ili, običnim jezikom: „Mira je prijatelj svakom ko lepo peva“

$(\exists x)(Mx \wedge Sx)$	ili formalnim jezikom: „Postoji bar jedno x takvo da je x smrtan i da x lepo peva.“ ili, običnim jezikom: „Neki smrtnici lepo pevaju“

U običnom govoru fraza „neki ljudi lepo pevaju“ obično znači da nekoliko ljudi (više od jednog) lepo peva, ali ne svi, dok u logičkom formalizmu „neki“ znači *bar jedan*.

U izrazu $(\forall x)(Pmx \Rightarrow Ryx)$ promenljiva y nije vezana kvantifikatorom, te stoga on nije rečenica i ne može se izraziti prirodnim jezikom bez upotrebe promenljive y („y mrzi svakog ko je Mirin prijatelj“). Da bi izraz bio rečenica, svaki term koji se pojavljuje u izrazu mora da bude bilo konstanta bilo promenljiva vezana kvantifikatorom.

Slično, u izrazu $Pmx \Rightarrow (\forall x)Ryx$, prvo x nije vezano kvantifikatorom $(\forall x)$ te stoga ovaj izraz nije rečenica.

Sintaksno ispravna predikatska formula I reda se može ovako definisati:

1. Predikat sa argumentima je predikatska foruma I reda;
2. Ako su F_1 i F_2 predikatske formule prvog reda onda su i konjunkcija $F_1 \wedge F_2$, disjunkcija $F_1 \vee F_2$, negacija $\neg F_1$, implikacija $F_1 \Rightarrow F_2$ i ekvivalencija $F_1 \Leftrightarrow F_2$ predikatske formule prvog reda.
3. Ako je x promenljiva, a F predikatska formula I reda, onda su i $(\forall x)F$ i $(\exists x)F$ takođe predikatske formule I reda.

Predikatski račun je pogodna notacija za specifikovanje skupova. Na primer, skup svih ljudi koje Mira mrzi može se specifikovati na sledeći način:

$$\{x \mid Mx \wedge Rmx\}$$

Skup svih ljudi koji mrze bar jednu smrtnu osobu može se specifikovati sa:

$$\{x \mid Mx \wedge (\exists y)(My \wedge Rxy)\}$$

a skup svih mizantropa sa:

$$\{x \mid Mx \wedge (\forall y)(My \Rightarrow Rxy)\}$$

Zadatak

Koristiti predikatski račun kao notaciju za specifikovanje skupova:

1. Skup A nenegativnih parnih celih brojeva;
2. Skup B nenegativnih celih brojeva koji nisu prosti;
3. Skup C nenegativnih prostih celih brojeva.

Koristiti sledeće predikate: $Cx = x \in Z$ (x je ceo broj), $Vxy = x \geq y$ (x je veće ili jednako y), $Dxy = y \mid x$ (x je deljivo sa y).

Rešenje

1. $A = \{x \mid Cx \wedge Vx0 \wedge Dx2\}$ ili
   $A = \{x \mid x \in Z \wedge x \geq 0 \wedge 2 \mid x\}$;

2. $B = \{x \mid Cx \wedge Vx0 \wedge (\exists y)(Cy \wedge Vy2 \wedge Vx(y-1) \wedge Dxy)\}$ ili
   $B = \{x \mid x \in Z \wedge x \geq 0 \wedge (\exists y)(y \in Z \wedge y \geq 2 \wedge x \geq y-1 \wedge y \mid x)\}$;
3. $C = \{x \mid Cx \wedge Vx0 \wedge (\forall y)((Cy \wedge Vy2 \wedge Vx(y-1)) \Rightarrow \neg Dxy)\}$ ili
   $C = \{x \mid x \in Z \wedge x \geq 0 \wedge (\forall y)((y \in Z \wedge y \geq 2 \wedge x \geq y-1) \Rightarrow \neg(y \mid x))\}$.

Datom logičkom izrazu može da odgovara više sintaksički različitih rečenica na prirodnom jeziku. S druge strane, rečenice koje su vrlo slične zahtevaju potpuno različit logički izraz. Na primer, rečenice „Sva ljudska bića su smrtna“ i „Neke ribe su mesožderi“ razlikuju se samo po upotrebljenim kvantifikatorima. Međutim, u njihovim logičkim izrazima koriste se implikacija, u prvom slučaju, a konjunkcija u drugom:

Lx	x je ljudsko biće (čovek)
Mx	x je smrtno
Rx	x je riba
$\check{Z}x$	x je mesožder
$(\forall x)(Lx \Rightarrow Mx)$	Sva ljudska bića su smrtna
$(\exists x)(Rx \wedge \check{Z}x)$	Neke ribe su mesožderi

Razmena veznika u dva izraza daje potpuno različite interpretacije:

$(\forall x)(Lx \wedge Mx)$	Sve na svetu je i ljudsko biće i smrtno.
$(\exists x)(Rx \Rightarrow \check{Z}x)$	Postoji nešto što ako je riba onda je mesožder. To je tačno čak iako *ni jedna* riba nije mesožder sve dok postoji nešto što nije riba ili nešto što je mesožder. Ovo se vidi iz ekvivalentne forme $(\exists x)(\neg Rx \vee \check{Z}x)$

U izrazima koji sadrže više kvantifikatora mora se voditi računa o redosledu kvantifikatora. Ponekad promena redosleda kvantifikatora ne utiče na značenje ali u mnogim slučajevima redosled je bitan. Na primer, neka je:

$O =$ „je otac od“	$L =$ „je osoba“
$S =$ „je sin od“	$M =$ „je muškarac“

U ovom slučaju rečenica

$$(\forall x)(\forall y)((Sxy \wedge My) \Rightarrow Oyx)$$

je ekvivalentna sa

$$(\forall y)(\forall x)((Sxy \wedge My) \Rightarrow Oyx)$$

i obe znače isto: „Za bilo koja dva objekta na svetu, ako je prvi sin drugog i drugi je muškarac, onda je drugi otac prvog“. S druge strane, izraz

$$(\forall x)(\exists y)(Lx \Rightarrow Oyx)$$

nije ekvivalentan sa izrazom

$$(\exists y)(\forall x)(Lx \Rightarrow Oyx)$$

Prvi tvrdi da svaka osoba ima oca a drugi da postoji bar jedna osoba koja je otac svim ljudima.

Primer

Neka su dati predikati:

$$P = \text{„je pas“},\ C = \text{„je čovek“},\ V = \text{„voli“}$$

onda se rečenica „Neki psi vole svakog čoveka (sve ljude)“ se prevodi u izraz:

$$(\exists x)(Px \wedge (\forall y)(Cy \Rightarrow Vxy))$$

Rečenica „Svaki čovek voli bar jednog psa“ prevodi se u izraz:

$$(\forall y)(Cy \Rightarrow (\exists x)(Px \wedge Vyx))$$

Rečenica „Svakog čoveka voli bar jedan pas“ prevodi se u izraz:

$$(\forall y)(Cy \Rightarrow (\exists x)(Px \wedge Vxy))$$

Zadatak

Date su rečenice:

1. Miru niko ne voli;
2. Ljilja voli sve ljude;
3. Zora voli sve ljude koje Mira voli.

Izabrati predikate i sastaviti rečenice u predikatskom računu koje odgovaraju ovim rečenicama na srpskom jeziku.

Rešenje

Predikati i termi su: $Cx =$ „x je čovek“, $Vxy =$ „x voli y“, $m =$ „Mira“, $l =$ „Ljilja“, $z =$ „Zora“

1. $\neg(\exists x)(Cx \wedge Vxm)$;
2. $(\forall x)(Cx \Rightarrow Vlx)$;
3. $(\forall x)((Cx \wedge Vmx) \Rightarrow Vzx)$;

Zadatak

Neka su dati predikati:

$$Bx = \text{„}x \text{ je broj“}(x \in N),\ Vxy = \text{„}x \text{ je veći od } y\text{“}(x > y)$$

Sledeće rečenice predikatskog računa prevesti u rečenice na srpskom jeziku tako da zvuče što je moguće prirodnije.

1. $(\forall x)(Bx \Rightarrow (\exists y)(By \wedge Vyx))$
   (ili $(\forall x)((x \in N) \Rightarrow (\exists y)((y \in N) \wedge (y > x)))$);
2. $(\exists y)(By \wedge (\forall x)(Bx \Rightarrow Vyx))$
   (ili $(\exists y)((y \in N) \wedge (\forall x)((x \in N) \Rightarrow (y > x)))$);

Rešenje

1. Za svaki broj postoji veći broj;
2. Postoji broj veći od svakog broja.

Zadatak

Neka su dati predikati: $Bx =$ „x je broj“$(x \in N)$, $Vxy =$ „x je veći od y“$(x > y)$, $Jxy =$ „x je jednak sa y“$(x = y)$. Prevesti sledeće rečenice u formule predikatskog računa:

1. Ako dva broja nisu jednaka, jedan od njih je veći od drugog.
2. Postoji broj koji je između 3 i 5.
3. Svaki broj veći od 4 je veći i od 3.

Rešenje

1. $(\forall x)(\forall y)((Bx \wedge By \wedge \neg Jxy) \Rightarrow (Vxy \vee Vyx))$
   (ili $(\forall x \in N)(\forall y \in N)((x \neq y) \Rightarrow ((x > y) \vee (y > x)))$)
2. $(\exists x)(Bx \wedge (Vx3 \wedge V5x))$
   (ili $(\exists x \in N)((x > 3) \wedge (5 > x))$)
3. $(\forall x)((Bx \wedge Vx4) \Rightarrow (Vx3))$
   (ili $(\forall x \in N)((x > 4) \Rightarrow (x > 3))$)

Zadatak

Ispitati tačnost sledećih rečenica u skupu prirodnih brojeva:

1. $(\forall x)(\exists y)(x < y)$
2. $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$

3. $(\forall x)(\exists y)(x > y)$
4. $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$
5. $(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = x)$

Rešenje

1. Za svaki prirodni broj postoji prirodni broj veći od njega — TAČNO;
2. Postoji prirodni broj koji je manji ili jednak svakom prirodnom broju — TAČNO (broj 0);
3. Za svaki prirodni broj postoji prirodni broj manji od njega — NETAČNO (ne postoji broj manji od 0);
4. Za svaka dva prirodna broja x i y važi da je $x + y = y + x$ — TAČNO (osobina komutativnosti);
5. Za svaki prirodni broj postoji prirodan broj takav da je njihov proizvod polazni broj — TAČNO (broj 1).

Neka je $P(x)$ sledeći predikat: x je realan broj i $x^2 + 1 = 0$. Iskaz predikatskog računa $(\exists x \in R)(P(x))$ bi se mogao rečima izraziti na sledeći način: Postoji realan broj x koji zadovoljava jednakost $x^2 + 1 = 0$. Kakva je tačnost ovog iskaza? Pošto znamo da je za svaki realan broj $x^2 \geq 0$ odatle sledi da je $x^2 + 1 \geq 1$, a to znači da je iskaz $(\exists x \in R)(P(x))$ netačan.

Negacija gornje rečenice je $\neg(\exists x \in R)(P(x))$. Ova rečenica bi se rečima mogla izraziti ovako: Ne postoji (nije tačno da postoji) realan broj za koji važi $x^2 + 1 = 0$. Drugim rečima, za sve realne brojeve važi da je $x^2 + 1 \neq 0$, a ovo bi se formalno moglo napisati $(\forall x \in R)(\neg P(x))$.

U stvari, za sve predikate važe sledeće ekvivalencije:

- $\neg(\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg(P(x)))$;
- $\neg(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg(P(x)))$;

Zadatak

Odrediti tačnost sledećih rečenica u skupu realnih brojeva i formulisati njihove negacije:

1. $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$
2. $(\exists x)(x^2 < 0)$

Rešenje

1. Proizvod svakog realnog broja s nulom je nula — TAČNO. Negacija ovog iskaza je $(\exists x)(x \cdot 0 \neq 0)$ — NETAČNO;
2. Postoji realan broj čiji je kvadrat manji od nule — NETAČNO. Negacija ovog iskaza je $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ — TAČNO.

2.2 Izvođenje u predikatskom računu

U logici iskaznog računa ukazano je na dva različita načina da se karakteriše valjano izvođenje. Prvi način je konstrukcija istinitosne tablice, a drugi je konstrukcija izvođenja željenog zaključka iz datih premisa u skladu sa specifikovanim skupom pravila izvođenja.

Za predikatski račun ne postoji metod koji je analogan istinitosnim tablicama preko kojih bi se moglo odrediti da li je pretpostavljeni zaključak valjan. Šta više, dokazano je da se takav metod ne može ni izumeti. To jest, ne postoji uniformna, konačna proceduru koja bi potvrdila ili odbacila valjanost nekog zaključka na mehanički način.

U slučaju iskaznog računa ukazano je da je metod konstrukcije izvođenja manje zamoran i da se više oslanja na intuiciju od metode istinitosnih tablica, ali ova druga metoda se uvek može koristiti za proveru. U slučaju predikatskog računa, takav metod za proveru ne postoji tako da je u opštem slučaju konstrukcija izvođenja jedini način da se utvrdi da neki zaključak sledi iz datih premisa. Za konstrukciju izvođenja ne postoji neki unapred dati recept već ovaj postupak obično traži domišljatost. Ne postoji *opšti* način da se utvrdi da određeni zaključak *ne sledi* iz datih premisa budući da nemogućnost konstruisanja izvođenja može da bude rezultat bilo nevaljanosti zaključka bilo nedostatka domišljatosti. Naravno, postoje metode da se nevaljanost ustanovi u pojedinačnim slučajevima, ali ne postoji metod koji bi to omogućavao u svim slučajevima.

Ovde neće biti predstavljen pun sistem pravila izvođenja predikatskog računa. Biće predstavljena samo ona pravila čija je valjanost očigledna i koja bi bila uključena u svaki sistem logičkog zaključivanja u predikatskog računa.

U daljim iskazima, P i Q označavaju bilo koje predikatske formule za koje nisu postavljena nikakva ograničenja na promenljive ili kvantifikatore osim ako drugačije nije eksplicitno naznačeno.

Prva dva zakona pokazuju kako se jedan kvantifikator može potpuno eliminisati u korist drugog.

$$\textit{Zakon 1} \qquad (\forall x)P \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg P$$

ili, rečima, „Sve ima osobinu P ako i samo ako ne postoji ništa što nema osobinu P“.

$$\textit{Zakon 2} \qquad (\exists x)P \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg P$$

ili, rečima, „Nešto ima osobinu P ako i samo ako nije tačno da svemu nedostaje osobina P“. Primeri iz svakodnevnog govora za ove dve ekvivalencije su:

„Svi ljudi su smrtni“ $\Leftrightarrow$ „Ni jedan čovek nije besmrtan“
„Neko je položio ispit“ $\Leftrightarrow$ „Nisu svi pali na ispitu“

Sledeća tri zakona odnose se na redosled uzastopnih kvantifikatora. Zakoni 3 i 4 ukazuju da je nebitan redosled uzastopnih kvantifikatora koji su bilo univerzalni bilo egzistencijalni.

Zakon 3 $\quad (\forall x)(\forall y)P \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P$

Zakon 4 $\quad (\exists x)(\exists y)P \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P$

Kada su univerzalni i egistencijalni kvantifikator izmešani njihov redosled je od značaja. Sledeći zakon je samo implikacija; obrnuta implikacija je lažna.

Zakon 5 $\quad (\exists x)(\forall y)P \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P$

Da bi očigledno pokazali važnost kvantifikatora, neka je $P =$ „y mrzi x“. Zakon 5 tvrdi da ako postoji bar jedna osoba koju svako mrzi onda svako mrzi bar jednu osobu. Jasno je da je obrnuto lažno, jer može biti tačno da svako mrzi bar jednu osobu a da pri tom nije tačno da postoji osoba koju svi mrze.

U sledećem primeru, neka je univerzum skup svih celih brojeva. Onda iskaz

$$(\exists x)(\forall y)(y - y = x)$$

koji se može prevesti u „Postoji broj koji je jednak razlici svakog broja i njega samog“ (to je broj 0), valjano implicira prema zakonu 5 iskaz

$$(\forall y)(\exists x)(y - y = x)$$

koji se može prevesti u „Za svaki broj postoji broj koji je jednak razlici tog broja i njega samog“. Međutim, iz tačnog iskazaa

$$(\forall y)(\exists x)(2y = x)$$

koji se može prevesti u „Za svaki celi broj postoji broj dvostruko veći“ ne može se izvesti netačan iskaz

$$(\exists x)(\forall y)(2y = x)$$

koji se prevodi u „Postoji bar jedan ceo broj koji je dva puta veći od svakog celog broja“.

Zakoni 6–9 odnose se na distribuciju kvantifikatora u formulama koje sadrže veznike „i“ i „ili“.

$$\textit{Zakon 6} \qquad (\forall x)(P \land Q) \Leftrightarrow (\forall x)P \land (\forall x)Q$$

to jest, sve je i P i Q ako i samo ako je sve P i Q. Sledeća formula je samo implikacija:

$$\textit{Zakon 7} \qquad (\forall x)P \lor (\forall x)Q \Rightarrow (\forall x)(P \lor Q)$$

Da bi se uverili da je obrnuta implikacija lažna primetimo da je tačno da je svaki ceo ili paran ili neparan ali nije tačno da je svaki ceo broj paran ili da je svaki ceo broj neparan.

$$\textit{Zakon 8} \qquad (\exists x)(P \lor Q) \Leftrightarrow (\exists x)P \lor (\exists x)Q$$

To jest, nešto postoji što je ili P ili Q ako i samo ako ili postoji nešto što je P ili nešto što je Q. Sledeće je samo implikacija:

$$\textit{Zakon 9} \qquad (\exists x)(P \land Q) \Rightarrow (\exists y)P \land (\exists x)Q$$

To jest, ako postoji nešto je i P i Q, onda postoji nešto što je P i postoji nešto, koje nije obavezno neko drugo, što je Q. Da bi se uverili da je obrnuto lažno, primetimo da iako postoje celi brojevi koji su parni i postoje celi brojevi koji su neparni ne postoje celi brojevi koji su i parni i neparni.

Primer

Korišćenje zakona 1 i 2:

a) Neki brojevi su manji od 5.
$(\exists x)(x < 5) \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg(x < 5) \Leftrightarrow \neg(\forall x)(x \geq 5)$

b) Sabiranje s nulom ne menja ni jedan broj.
$(\forall x)(x + 0 = x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg(x + 0 = x) \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x + 0 \neq x)$

Primer

Primer koji ilustruje zakon 5, tj. da u tom zakonu važi samo implikacija:

a) Za svaki realni broj postoji sabirak koji ne menja vrednost broja.
$(\forall x)(\exists y)(x + y = x) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)(x + y = x)$ (Izvedeno tvrđenje je TAČNO — to je broj 0.)

b) Za svaki realni broj postoji broj veći od njega.
$(\forall x)(\exists y)(x < y) \not\Rightarrow (\exists y)(\forall x)(x < y)$ (Izvedeno tvrđenje NIJE TAČNO, ne postoji najveći broj!)

Primer

Primer koji ilustruje zakon 7, tj. da u tom zakonu važi samo implikacija: Svaki broj je ili negativan ili nenegativan.
$(\forall x)((x < 0) \vee (x \geq 0)) \not\Rightarrow (\forall x)(x < 0) \vee (\forall x)(x \geq 0)$ (Izvedeno tvrđenje NIJE TAČNO jer tvrdi „svi brojevi su negativni ili su svi brojevi nenegativni".)

Primer

Primer koji ilustruje zakon 9, tj. da u tom zakonu važi samo implikacija: Neki brojevi su negativni i neki brojevi su nenegativni .
$(\exists x)(x < 0) \wedge (\exists x)(x \geq 0)) \not\Rightarrow (\exists x)((x < 0) \wedge (x \geq 0)$ (Izvedeno tvrđenje NIJE TAČNO jer tvrdi „neki brojevi su i negativni i nenegativni".)

Primer

Primer koji ilustruje zakon 5, tj. da u tom zakonu važi samo implikacija: Za svako x postoji tačno jedno y takvo da je $x^2 = y$.

$$(\forall x)(\exists y)((x^2 = y) \wedge (\forall z)((x^2 = z) \Rightarrow (z = y)))$$
$$\not\Rightarrow$$
$$(\exists y)(\forall x)((x^2 = y) \wedge (\forall z)((x^2 = z) \Rightarrow (z = y)))$$

(Izvedeno tvrđenje NIJE TAČNO jer tvrdi „postoji tačno jedan broj koji je jednak kvadratu svih brojeva".)

Zadatak

Neka su dati predikati i termi l = Laguna, Dx = „x je domaći autor", Oxy = „x je objavio y" i rečenica $(\exists x)(Dx \wedge Olx)$.

1. Izraziti rečenicu predikatskog računa prirodnim jezikom;
2. Zameniti u rečenici predikatskog računa egzistencijalni kvantifikator univerzalnim;
3. Dobijenu rečenicu predikatskog računa izraziti prirodnim jezikom.

Rešenje

1. Laguna je objavila nekog domaćeg autora;
2. $\neg(\forall x)\neg(Dx \wedge Olx) \Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg Dx \vee \neg Olx)$(De Morganov zakon) $\Leftrightarrow$ $\neg(\forall x)(Dx \Rightarrow \neg Olx)$ (ekvivalent implikacije);
3. Nije tačno da Laguna nije objavila ni jednog domaćeg autora.

Zadatak

Neka su dati predikati Cx = „x je čovek", Px = „x je pametan", Ox = „x je pošten" i rečenica $(\forall x)(Cx \Rightarrow (Px \wedge Ox)$.

a) Izraziti rečenicu predikatskog računa prirodnim jezikom;

b) Koja od sledećih tvrđenja su negacije gornje rečenice:

   i. $(\exists x)(Cx \wedge (\neg Px \wedge Ox)$;
   ii. $\neg(\exists x)(Cx \wedge (Px \wedge \neg Ox)$;
   iii. $(\exists x)(Cx \wedge (\neg Px \vee \neg Ox))$

c) Formalno dokazati rešenje pod b).

Rešenje

a) Svi ljudi su pametni i pošteni;

b) i. Postoji osoba koja je glupa i poštena;
   ii. Ne postoji osoba koja je pametna i nepoštena;
   iii. Postoji osoba koja je glupa ili nepoštena
   Tačan je odgovor iii.

c) $\neg(\forall x)(Cx \Rightarrow (Px \wedge Ox)) \Rightarrow (\exists x)\neg(Cx \Rightarrow (Px \wedge Ox)) \Rightarrow$
$(\exists x)\neg(\neg Cx \vee (Px \wedge Ox))$(ekvivalent implikacije) $\Rightarrow$
$(\exists x)(Cx \wedge \neg(Px \wedge Ox))$(de Morganov zakon) $\Rightarrow$
$(\exists x)(Cx \wedge (\neg Px \vee \neg Ox))$(de Morganov zakon)

2.3 Zadaci

Primer jednog testa

1. U skupu prirodnih brojeva $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ posmatraju se rečenice:

   (I) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 10)$.
   (II) $(\forall x)(\exists y)(x < y)$.
   (III) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$.

   Tačne su rečenice (zaokruži): (a) sve (b) samo I (c) samo III (d) samo II i III (e) samo I i III. Obrazloži!

2. Neka su dati predikati — Px: „broj x je prirodan broj > 1“ Rx : „x je različito od y“ i Dxy: „broj y deli broj x bez ostatka“. Šta su elementi skupa $\{x | Px \wedge (\exists y)(Py \wedge Rxy \wedge Dxy)\}$?

3. U sledećim rečenicama predikatskog računa zameniti jedan kvantifikator drugim (univerzalni egzistencijalnim, odnosno egzistencijalni univerzalnim) a da rečenica zadrži isto značenje (univerzum je skup prirodnih brojeva)

   a) $(\exists x)(x < 5)$.

   b) $(\forall x)(x \cdot 1 = x)$.

   c) $(\forall x)(x + 0 = x)$.

   d) $\neg(\exists x)(3x + 2 = 3)$.

4. Neka su dati predikati — Px: „broj x je prirodan broj“ i Dxy: „broj y deli broj x bez ostatka“. Ako je domen skup prirodnih brojeva, napisati u predikatskom računu rečenicu: NEMAJU SVI BROJEVI POLOVINU

Rešenja zadataka

1. a) Za svaki prirodni broj postoji prirodni broj koja ga dopunjava do deset — NETAČNO;

   b) Za svaki prirodni broj postoji broj veći od njega — TAČNO;

   c) Redosled množenja nije od značaja ni za koja dva prirodna broja — TAČNO.

   Tačan odgovor na ovo pitanje je (d).

2. U ovom skupu su svi prirodni brojevi x veći od 1 za koje postoji (bar jedan) drugi različit prirodni broj koji ga deli bez ostatka. Dakle, u skupu su svi prirodni brojevi koji nisu prosti.

3. a) $\neg(\forall x)(x \geq 5)$ (Zakon 2).

   b) $\neg(\exists x)(x \cdot 1 \neq x)$ (Zakon 1).

   c) $\neg(\exists x)(x + 0 \neq x)$ (Zakon 1).

   d) $(\forall x)(3x + 2 \neq 3)$ (Zakon 2).

4. $\neg(\forall x)(Px \Rightarrow Dx2)$ ili $(\exists x)(Px \land \neg Dx2)$

Zadaci za vežbu

1. Prevesti sledeće izraze na srpski. U rečenicama ne treba koristiti promenljive x i y. Rečenice treba da budu što prirodnije. Dati su sledeći predikati i konstante:

Predikati:	$Bx =$ „x je broj“
	$Vxy =$ „x je veći od y“
	$Zx =$ „x je ceo broj“
	$Jxy =$ „x je jednak y“
Konstante:	$1, 2, 3, \ldots$

a) $\neg(\forall x)(Bx \Rightarrow Zx)$;

b) $(\forall x)(Zx \Rightarrow Bx)$;

c) $(\forall x)((Bx \wedge V5x) \Rightarrow V6x)$;

d) $(\forall x)((Bx \wedge Vx3 \wedge V4x) \Rightarrow \neg Zx)$;

e) $\neg(\exists x)((Bx \wedge (\forall)(By \Rightarrow Vyx))$;

f) $(\forall x)(\forall y)(Jxy \Leftrightarrow Jyx)$.

2. Sledeće rečenice na srpskom jeziku prevesti u rečenice predikatskog računa koristeći predikate i konstante iz prethodnog zadatka:

   a) Postoji bar jedan ceo broj između 5 i 9.

   b) Ako je jedan broj veći od drugog onda drugi broj nije veći od prvog.

   c) Ako je jedan broj veći od drugog a drugi od trećeg onda je i prvi broj veći od trećeg.

   d) Ni jedan broj nije veći od samog sebe.

   e) Neki brojevi su veći od 2.

   f) Ni jedan broj nije i veći i manji od 2.

3. Prevesti u što prirodnije rečenice na srpskom jeziku sledeće iskaze predikatskog računa koji koristi predikate $Sx =$ „$x \in S$“ i $Nxy =$ „$x \neq y$“:

   (a) $\neg(\exists x)Sx$;

   (b) $(\exists x)(Sx \wedge \neg(\exists y)(Nxy \wedge Sy))$.

4. Koristiti predikatski račun kao notaciju za specifikovanje skupova (izabrati i definisati potrebne predikate):

   (a) Skup A celih brojeva deljivih sa 3 i sa 5;

   (b) Skup C prostih celih brojeva većih od 1000.

   (c) Skup B nenegativnih celih brojeva koji nisu prosti.

5. Date su rečenice:

(a) Svaki trougao ima bar dva oštra ugla;

(b) Ne postoji trougao sa dva prava ugla.

Koristeći predikate $Tx =$ „x je trougao", $Uxy =$ „x je ugao trougla y" i $Sx =$ „broj stepeni ugla x", sastaviti rečenice u predikatskom računu koje odgovaraju ovim rečenicama na srpskom.

6. Date su rečenice:

(a) Za svaki prost broj postoji broj koji je veći od njega;

(b) Ne postoje dva uzastopna prosta broja veća od 3;

(c) Postoji samo jedan prost broj deljiv sa 2.

Izabrati predikate i sastaviti rečenice u predikatskom računu koje odgovaraju ovim rečenicama na srpskom.

7. Date su rečenice:

(a) Nemaju svi brojevi polovinu;

(b) Svi brojevi su polovina nekog broja.

Izabrati predikate i sastaviti rečenice u predikatskom računu koje odgovaraju ovim rečenicama na srpskom.

8. Date su rečenice:

(a) Za svaki ceo broj važi da je njegov kvadrat nenegativan broj;

(b) Neki celi brojevi su negativni;

(c) Ne postoji najmanji ceo broj.

Koristeći predikate $Cx =$ „x je ceo broj", $Vxy =$ „$x > y$", $Nx =$ „$x = 0$", sastaviti rečenice u predikatskom računu koje odgovaraju ovim rečenicama na srpskom.